PHYSICAL SOCIETY

MEMOIRS

OF THE

COLLEGE OF SCIENCE

KYOTO IMPERIAL UNIVERSITY

SERIES A

VOL. XVIII, NO. 3

MAY 1935

KYOTO

Sur le Dispersement et l'Écart Moyen de l'Écoulement des Eaux Souterraines

III. Expériences Faites dans le Sol

par **Kiugoro Kitagawa**

(Reçu le 9 février 1935)

Sommaire

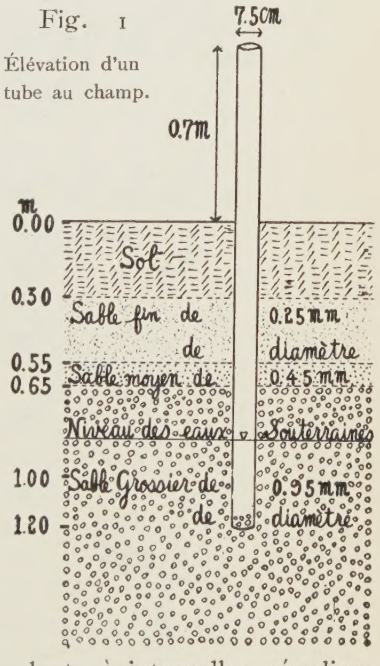
Dans les Notes précédentes, on a étudié avec un appareil de laboratoire le dispersement et l'écart moyen d'un courant d'eau à travers le sable, et trouvé leurs régimes qui sont très importants.

Dans la Note présente, on étend les expériences à un sol naturel, pour étudier le dispersement et l'écart moyen de l'écoulement des eaux souterraines, et on établit le régime de la proportionnalité du dispersement et de l'espace parcouru. Puis on vérifie dans un cas défini la formule théoriquement établie sur la vitesse de l'écoulement des eaux souterraines.

§ 1 Disposition et Données des Expériences Faites dans le Sol

On a précédemment précisé l'idée[1] du dispersement d'un courant d'eau dans le sol, et calculé l'écart moyen de l'écoulement des eaux souterraines. Depuis lors on a fait construire un appareil[2] de laboratoire, avec lequel écart et circuit du courant d'eau ont été mesurés, et l'on a vérifié notre idée du dispersement, tout en trouvant de nouveaux résultats importants. Proposons-nous maintenant d'expérimenter en plein sol, en choisissant pour terrain une partie du jardin de l'École Supérieure d'Agriculture de Mié.

Fig. 1



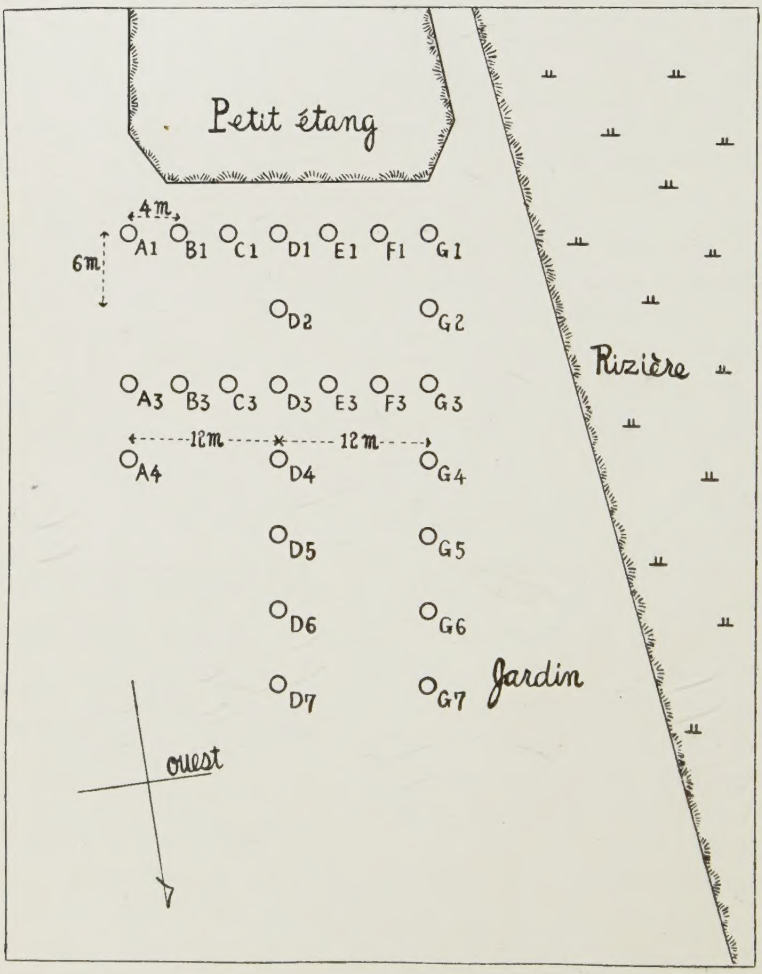
Premier cas.—Le 27 septembre, on plante à intervalles réguliers

1. K. Kitagawa, ce Mémoire, **15**, 4, 203 (1932)
2. K. Kitagawa, ce Mémoire, **17**, 1, 37 (1934), et **17**, 6, 431 (1934)

dans cette partie du jardin 25 tubes métalliques de 7.5 cm de diamètre, et de 1.9 m de longueur, et on les enterre jusqu'à 1.2 m de profondeur. La figure annexe 1 représente l'élévation d'un tube enterré, le sol se composant de terre, de sable fin de 0.25 mm de diamètre, de sable moyen de 0.45 mm, et de sable grossier de 0.95 mm. La figure ajoutée 2 montre le plan des 25 positions des tubes dans cette partie du jardin, dont la surface est plate et plus haute d'un mètre que celle de la rizière. Par conséquent, la pente de pression hydraulique fait face à l'ouest, sa grandeur variant de 0.002 à 0.003 en

Fig. 2

Plan des 25 positions de tube.



septembre et octobre, et diminuant de moitié de ces nombres en novembre et décembre. L'eau s'écoule donc à travers le sous-sol d'une façon erratique vers l'ouest. Le 14 octobre, à dix heures du matin, on introduit dans le tube nommé A4 1.3 kg de sel. Après cette charge, on puise dans les tubes D's et G's de l'eau qui s'est écoulée à travers le sous-sol, et on évalue par l'emploi du nitrate d'argent sa salinité, calculant ainsi les écarts de l'écoulement. Voici deux séries de résultats fournis par les expériences, dans des conditions aussi pareilles que possible ; l'écart type σ et la distribution de fréquence moyenne a étant calculés par la méthode des moments, en prenant comme unité : 6 m (Tableaux I (1), et I (2)), et en désignant par x_1 la distance entre le tube A4 et la ligne des tubes dont on contrôle la sali-

Tableau I (1)

$x_1 = 12$ m.

Positions	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Moyenne $\equiv y$	Σy	$\Sigma^2 y$
D_1	0	0	0	0	16.9	10.4	10.2	4.0	13.3	11.9	6.7	100.0 $\equiv S_0$	
D_2	33.3	33.3	28.6	28.6	25.4	20.8	20.4	20.0	16.7	16.9	24.4	93.3	227.2 $\equiv S_1$
D_3	33.3	33.3	42.9	35.7	33.9	27.1	26.5	30.0	25.0	25.4	31.3	68.9	133.9
D_4	33.3	33.3	28.6	35.7	16.9	20.8	20.4	20.0	16.7	16.9	24.3	37.6	65.0
D_5	0	0	0	0	3.4	8.3	8.2	6.0	8.3	3.4	3.8	13.3	27.4
D_6	0	0	0	0	1.7	6.3	8.2	8.0	8.3	16.9	4.9	9.5	14.1
D_7	0	0	0	0	1.7	6.3	6.1	12.0	11.7	8.5	4.6	4.6	4.6
Date	15 oct.	24 „	29 „	2 nov.	5 „	6 „	7 „	9 „	10 „	14 „	$a = 3.27$, $\sigma = 1.42$		472.2 $\equiv S_2$
Temp.	21°C	20	19	18	17	17	17	17	17	16			

Tableau I (2)

$x_1 = 24$ m.

Positions	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Moyenne $\equiv y$	Σy	$\Sigma^2 y$
G_1	0	0	33.3	7.9	9.8	10.5	15.9	14.5	13.8	13.5	11.9	100.0 $\equiv S_0$	
G_2	50.0	33.3	33.3	34.2	27.5	26.3	23.8	24.2	21.5	24.3	29.8	88.1	262.1 $\equiv S_1$
G_3	50.0	33.3	0	26.3	23.5	21.1	19.0	21.0	21.5	16.2	23.2	58.3	174 0
G_4	0	0	0	0	3.9	7.0	7.9	8.1	9.2	9.5	4.6	35.1	115.7
G_5	0	0	0	0	3.9	7.0	7.9	8.1	6.2	4.1	3.7	30.5	80.6
G_6	0	0	0	0	7.8	3.5	4.8	3.2	4.6	10.8	3.5	26.8	50.1
G_7	0	33.3	33.3	31.6	23.5	24.6	20.6	21.0	23.1	21.6	23.3	23.3	23.3
Date	15 oct.	24 „	29 „	2 nov.	5 „	6 „	7 „	9 „	10 „	14 „	$a = 3.62$, $\sigma = 2.15$		705.8 $\equiv S$
Temp.	21°C	20	19	18	17	17	17	17	17	16			

nité. La valeur absolue de la concentration de salinité de l'eau puisée est dans cette expérience au plus de 0.1 ‰. Le 27 octobre, on introduit une deuxième fois 2 kgs de sel dans le tube A4.

Deuxième cas.—Puis le 22 novembre, on change les tubes de positions, comme le montre la figure ci-jointe (Fig. 3), et on introduit une troisième fois 2 kgs de sel dans le tube A4 le 28 novembre.

On calcule les résultats des expériences à partir du 29 novembre.

Voici deux séries de résultats qui se déduisent, dans des conditions aussi pareilles que possible, des dites expériences (Tableaux II (1), et II (2)).

Fig. 3

Plan des 30 positions de tube.

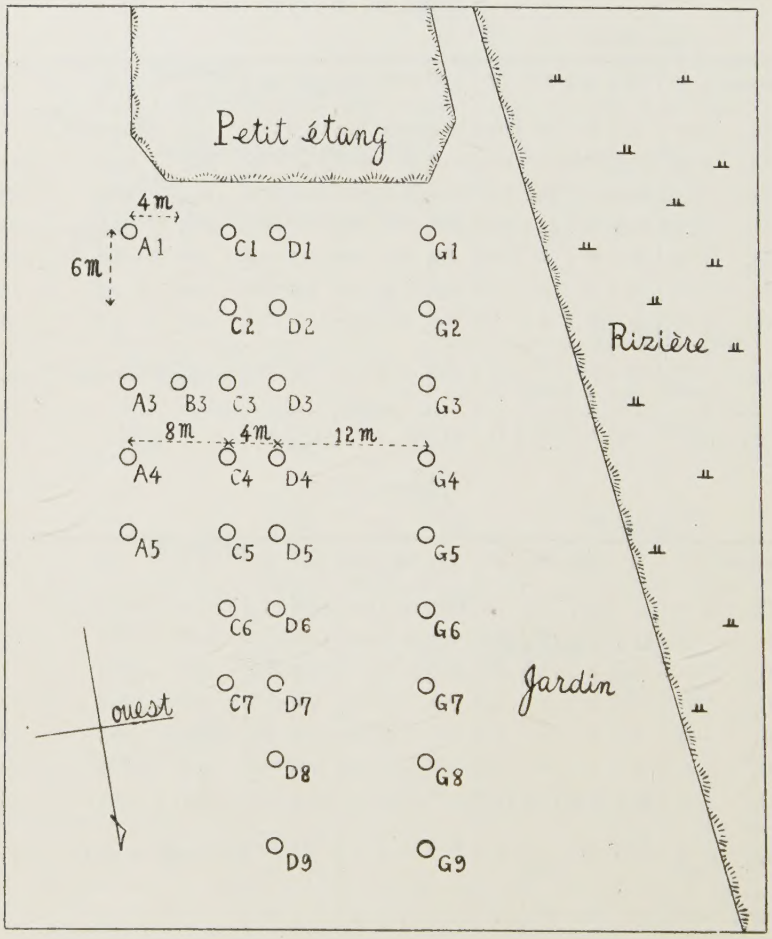


Tableau II (1)

$x_1 = 8$ m

Positions	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Moyenne $\equiv y$	Σy	$\Sigma^2 y$
C_1	17.9	18.6	21.4	17.1	11.9	21.4	20.0	19.5	14.6	21.3	18.4	100.1 $\equiv S_0$	
C_2	12.8	11.6	11.9	8.6	14.3	11.9	7.5	12.2	12.2	17.0	12.0	81.7	285.2 $\equiv S_1$
C_3	15.4	14.0	11.9	14.3	14.3	14.3	17.5	12.2	17.1	12.8	14.4	69.7	203.5
C_4	17.9	14.0	16.7	14.3	19.0	16.7	17.5	17.1	14.6	14.9	16.3	55.3	133.8
C_5	7.7	16.3	14.3	17.1	14.3	11.9	15.0	12.2	9.8	8.5	12.7	39.0	78.5
C_6	12.8	11.6	11.9	14.3	11.9	14.3	12.5	14.6	14.6	12.8	13.1	26.3	39.5
C_7	15.4	14.0	11.9	14.3	14.3	9.5	10.0	12.2	17.1	12.8	13.2	13.2	13.2
Date	29 nov.	30 „	1 déc.	3 „	4 „	5 „	6 „	7 „	8 „	10 „	$a = 3.85$, $\sigma = 2.02$		753.7 $\equiv S_2$
Temp.	14°C	13	13	13	13	13	13	13	13	12			

Tableau II (2)

$x_1 = 12$ m.

Positions	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	Moyenne $\equiv y$	Σy	$\Sigma^2 y$
D_1	9.7	11.6	9.5	10.8	10.8	11.0	10.8	9.4	11.1	10.5	10.5	100.1 $\equiv S_0$	
D_2	12.5	14.5	13.5	13.5	12.0	12.2	12.0	11.8	11.1	11.6	12.5	89.6	358.6 $\equiv S_1$
D_3	18.1	20.3	21.6	20.3	18.1	22.0	20.5	22.4	22.2	23.3	20.9	77.1	269.0
D_4	13.9	14.5	13.5	13.5	12.0	13.4	13.3	14.1	13.3	11.6	13.3	56.2	191.9
D_5	6.9	7.2	5.4	6.8	7.2	7.3	7.2	8.2	6.7	5.8	6.9	42.9	135.7
D_6	8.3	5.8	6.8	6.8	9.6	6.1	7.2	5.9	7.8	9.3	7.4	36.0	92.8
D_7	9.7	7.2	9.5	9.5	9.6	9.8	9.6	7.1	8.9	8.1	8.9	28.6	56.8
D_8	11.1	13.0	12.2	10.8	10.8	9.8	10.8	10.6	11.1	11.6	11.2	19.7	28.2
D_9	9.7	5.8	8.1	8.1	9.6	8.5	8.4	10.6	7.8	8.1	8.5	8.5	8.5
Date	29 nov.	30 „	1 déc.	3 „	4 „	5 „	6 „	7 „	8 „	10 „	$a = 4.58$, $\sigma = 2.53$		1141.5 $\equiv S_2$
Temp.	14°C	13	13	13	13	13	13	13	13	12			

§ 2 Proportionnalité du Dispersement et de l'Espace Parcouru

Dans une Note précédente[1], on a vérifié par l'expérience avec un modèle de laboratoire que le dispersement du courant d'eau dans le sable est proportionnel à l'espace parcouru : à savoir

$$\frac{\sigma}{x_1} = \text{const.} \quad \ldots(1)$$

σ désignat l'écart type du dispersement, et x_1 l'espace parcouru par l'eau. Afin de vérifier en plein sol cette

1. K. Kitagawa, ce Mémoire, **17**, 1, 37 (1934)

règle, calculons les valeurs numériques par les données expérimentales comme suit :

Premier cas.—On a, grâce aux Tableaux I (1) et I (2),

avec $x_1=12\text{m}$, $\frac{\sigma}{x_1}=\frac{6\times 1.42}{12}=0.72$ .....(2)

et avec $x_1=24\text{m}$, $\frac{\sigma}{x_1}=\frac{6\times 2.15}{24}=0.54$ .....(3)

Le rapport de $\frac{\sigma}{x_1}$ montre que la déviation du régime (1) est dans ce cas de l'orde de vingt pour cent.

Deuxième cas.—On a, grâce aux Tableaux II (1) et II (2),

avec $x_1=8\text{m}$, $\frac{\sigma}{x_1}=\frac{6\times 2.02}{8}=1.52$ .....(4)

et avec $x_1=12\text{m}$, $\frac{\sigma}{x_1}=\frac{6\times 2.53}{12}=1.27$ .....(5)

Le rapport de $\frac{\sigma}{x_1}$ montre que la déviation du gégime (1) est dans ce cas de l'ordre de dix pour cent. Par conséquent, la proportionnalité de l'écart moyen à l'espace parcouru peut être considérée comme bien établie en plein sol, en tenant compte de la variété des conditions expérimentales, et des écarts d'observation.

§ 3 Vérification de la Formule de la Vitesse de l'Écoulement des Eaux Souterraines

Nous avons introduit, comme cité plus haut, dans le tube A4 1.3 kg de sel à dix heures du matin le 14 octobre, et nous avons trouvé pour la première fois une trace de salinité dans le tube G_2 à deux heures de l'après midi le lendemain. On suppose donc que dans le sous-sol la vitesse du courant d'eau est :

$V_1=22\frac{\text{m}}{\text{jour}}$ ...(6) l'espace parcouru entre A4 et G_2 étant égal à 26 m.

D'autre part, on a la formule[1] sur la vitesse V de l'écoulement des eaux souterraines :

$V=31.89\frac{d^2\eta}{\mu k}\frac{\text{m}}{\text{jour}}$ ...(7) d désignant le diamètre moyen en mm du sable, η la pente de pression hydraulique, μ le coefficient

1. K. Kitagawa, ce Mémoire, **15**, 4, 212 (1932)

de viscosité, k le vide du sous-sol.

Calculons, de cette formule (7), la vitesse du courant d'eau, en portant les valeurs numériques des constants d, η, μ et k : $\eta=0.0025$ en divisant par l'espace parcouru 26 m la différence de pression hydraulique 6.5 cm. $d=0.95$ mm. donné par mesure. $\mu_{\pm 1°C}=0.00984$ d'après les tableaux[1]. $k=0.3513$ le vide moyen géométriquement calculé[2]. En conséquence, on obtient

$$V=21\frac{\text{m}}{\text{jour}} \quad \ldots(8)$$

ce qui est presque la même valeur que celle de (6). C'est une vérification de la formule (7) théoriquement déjà établie sur la vitesse de l'écoulement des eaux souterraines.

Pour terminer ce Mémoire, nous désirons adresser tous nos remerciements à M. le professeur T. Nomitsu qui nous a donné, au cours de ces recherches, des conseils très importants.

Nous remercions également la Fondation Nippon-Gakujutu-Sinkokai dont la subvention nous a été très précieuse pour ce travail.

1. MM. Landolt, Phys. Chem. Tabellen, **1**, 137 (1923)
2. K. Kitagawa, ce Mémoire, **15**, 4, 211 (1932)

Digitized by the Internet Archive
in 2024

https://archive.org/details/memoirs-faculty-science-kyoto-phys-astro-geophys-chem_1935-05_18_3

Über den inneren Aufbau der Weissen Zwerge

von **Toschima Araki** und **Michinori Kurihara**

(Eingegangen am 15, März 1935)

Auszug.

Einer der Verfasser (T. A.) dieser Abhandlung hat neulich eine Theorie des inneren Aufbaues der Weissen Zwerge entwickelt, indem er das *Milne*sche „Standard"-Modell eines aus nicht-relativistisch entartetem Gas bestehenden Weissen Zwerges dadurch verallgemeinert hat, dass man eine Beziehung zwischen der Energieerzeugung und der Dichte im Innern solches Sternes annimmt; eine der Fundamentalgleichungen ist die *Emden*sche polytrope Gleichung mit einem verkleinerten Index n gewesen, obwohl das Gleichgewicht selbst kein polytropes ist. (Zeits. f. Astrophys. **8**, 1934, SS. 358–369). Im ersten Abschnitte dieser Abhandlung ist der Auszug dieser Theorie skizziert; dabei sind aber die Formeln derart verallgemeinert worden, dass sie auch auf den Fall des relativistisch entarteten Gases anwendbar ist. Im zweiten Abschnitte sind die numerischen Berechnungen in bezug auf die nicht-relativistischen Weissen Zwerge für die Werte von $n=1$, 0.5 und 0 durchgeführt worden und schliesslich im dritten Abschnitte ist die negative Energiequelle näher betrachtet worden.

Einleitung.

§ 1. Auf die Tatsache, dass der Begleiter von Sirius eine uns bei irdischen Experimenten niemals begegnende aussergewöhnlich grosse Dichte besitzt, lenkte W. W. Campbell[1] schon im Jahre 1920 die Aufmerksamkeit. In 1924 deutete A. S. Eddington[2] darauf hin, dass, wenn solche aussergewöhnlich grosse Dichte wirklich in der Natur möglich ist, so sie insbesondere bei dem Siriusbegleiter, dank seiner Begleiterschaft, als eine von der allgemeinen Relativitätstheorie zu erfordernde beträchtlich grosse Gravitationsrotverschiebung der Spektrallinien zutage treten muss, welche, durch entsprechende *Doppler*geschwindigkeit ausgedrückt, + 20 km. pro Sekunde beträgt. Die Bestätigung dieser theoretischen Schlusserfolge Eddingtons gelang bald W. S. Adams[3], der aus den sehr schwierigen jedoch sehr geschickt ausgeführten Messungen von auf dem Mount Wilson Observatorium aufgenommenen Spektrogrammen eine Rotverschiebung von + 21 km./sec. erhielt. Die Übereinstimmung des beobachteten Wertes mit dem theoretischen ist überraschend! Diese Beobachtung von Adams besitzt zweifache

1. W. W. Campbell, Astron. Soc. Pacific Publ. **32** (1920) 199
2. A. S. Eddington, M. N. R. A. S. **84** (1924) 308.
3. W. S. Adams, Nat. Acad. Sci. U. S. A. Proc. **11** (1925) 382.

Wichtigkeit, soweit sie einerseits rein physikalisch eine neue Prüfung des dritten *Einstein*schen Effektes der allgemeinen Relativitätstheorie geliefert und andererseits astrophysikalisch die tatsächliche Existenz der Materie mit aussergewöhnlich grosser Dichte im Weltall bestätigt hat.— Prof. Adams hat, wie Sir Arthur Eddington sagt, sozusagen zwei Vögel mit einem Steine erlegt. Die Beobachtungsangaben betreffs des Siriusbegleiters sind folgendermassen :— Masse, 0.85⊙ ; Radius, beinahe zwanzigtausend Kilometer ; wir begegnen also bei dem Siriusbegleiter einem Stern von etwa Sonnenmasse mit einem Radius, der viel kleiner als der Rudius des Planeten Uranus ist ; hieraus berechnet, muss die mittlere Dichte ungefähr 50000 gr. pro cc. betragen. Seine absolute Helligkeit ist 11.3 m, was einem Dreihundertsechzigstel der Sonnenleuchtkraft entspricht ; er ist also ein typischer Zwergstern in bezug auf die Leuchtkraft. Die Zwerge gehören im allgemeinen den rotfärbigen Sternen zu. Da aber das Spektrum des Siriusbegleiters von Typus A ist, ist solcher Stern „ Weisser Zwerg " genannt worden. Von der linearen Dimension oder dem Volumen aus gesehen, darf ein gewöhnlicher Zwerg im Vergleich mit dem Siriusbegletier auch noch sogar als „ Riesenstern " gelten. K. F. Bottlinger[1] hat also dem Weissen Zwerge einen Märchen-Namen aus *Gullivers* Abenteuern „ Liliput-Stern " verliehen, um ihn von gewöhnlichen Zwergen zu unterscheiden.

Bis jetzt sind einige Weisse Zwerge bekannt, nämlich gehören die *B* Komponente von o_2 Eridani, *van Maanens* Stern und der Begleiter von Procyon sicher solcher Sternklasse an ; wahrscheinlich auch der Begleiter von Mira Ceti. Die Anzahl der Sterne ist noch nicht gross, aber das bedeutet notwendig nicht, dass die Weissen Zwerge der sehr seltenen, sonderbaren Klasse der Himmelskörper gehören. Umgekehrt dürfen wir sie eher für gewöhnliche Objekte im Universum halten, denn, wenn sie sich nicht genug in der Nähe unserer Sonne befänden, so würden sie sich keine Gelegenheit an unserer Beobachtung bieten. Bottlingers Meinung nach mögen sie etwa 10% aller Sterne ausmachen. Wenn man weiter daran denkt, dass die wesentliche Bedingung für einen Weissen Zwerg in einer verhältnismässig niedrigen absoluten Leuchtkraft in Verbindung mit einer hohen Oberflächentemperatur besteht, so dürfen wir wohl mit Recht vermuten, dass die Zentralsterne der planetarischen Nebel sowie die Ex-Novae auch solcher Sternklasse angehören[2].

1. K. F. Bottlinger, Festschrift für Hugo v. Seeliger, Berlin, 1924, S. 346.
2. Vgl. E. A. Milne, Nature **130** (1932) 599.

§ 2. Trotzdem eine so ungeheuer hohe Dichte wie von der Ordnung 10^5 gr. pro cc. im irdischen Laboratorium ganz undenkbar ist, stellen sich der Sache keine unmittelbaren Schwierigkeiten entgegen, vom heutigen atomtheoretischen Standpunkte aus gesehen. Denn die Atome müssen unter den in einem Sterne herrschenden Bedingungen in hohem Grade ionisiert werden und wenn dieser Vorgang die äusserste mögliche Grenze erreicht, indem die Atome alle in die nackten Kerne und die freien Elektronen völlig zertrümmert werden, so würden sich die einzelnen unabhängigen Teilchen bis zu einer der linearen Dimension des Kernes sowie des Elektrons entsprechenden Entfernung, 10^{-13} cm, einander nähern können, was einer Dichte von der Ordnung 10^{15} gr. pro cc. entspricht. Aber diesen Sachverhältnissen stellt sich, wie A. S. Eddington[1] zuerst gezeigt hat, anderweitig eine ernste Schwierigkeit entgegen, welche darin besteht, dass, da eine so enge Packung der Materie, wie bei den Weissen Zwergen, nur solange möglich ist, als die Temperatur hoch genug bleibt, um die Materie im nötigen Masse zu ionisieren, so der Stern sich ausdehnen, also gegen die Gravitationskräfte Arbeit leisten muss, wenn er sich abkühlt und die normale Dichte, die sich festen Körpern gewöhnlich zuschreiben lässt, wiedererlangt, d. h. dass der Stern Energie brauchen wird, um sich abkühlen zu können, was dem Prinzip der Thermodynamik entgegengesetzt ist. Diese Paradoxie ist durch eine sehr bemerkenswerte Untersuchung von R. H. Fower[2] auseinandergesetzt worden, welcher die von E. Fermi und von P. A. M. Dirac unabhängig voneinander vorgeschlagene neue Statistik, nämlich die Theorie des entarteten Gases, zugrunde liegt.

Die Entartung des Elektronengases erweist sich im Innern unserer Sonne sowie vieler gewöhnlichen Sterne als unwesentlich gering, während sie bei Sternen von so aussergewöhnlich grosser Dichte, wie bei den Weissen Zwergen, keineswegs vernachlässigt werden darf[3]. In der Tat kann man nach dem *Sommerfeld*schen Entartungskriterium[4] leicht sehen, dass die Elektronen für Dichte von der Grössenordnung 10^5 gr. pro cc. bis zu Temperatur von 10^9 Grad abs. noch ein entartetes System bilden.

---

1. A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, ins Deutsche übertragen von E. v. d. Pahlen, Berlin, S. 208.
2. R. H. Fowler, M. N. R. A. S. **87** (1926) 87.
3. Vgl. W. Anderson, Zeits. f. Phys. **50** (1928) 874
4. A. Sommerfeld, Zeits. f. Phys. **47** (1928) 1.

Seit der oben zitierten Untersuchung von Fowler wurde die Theorie der Weissen Zwerge von vielen Forschern entwickelt. Der möglichste letzte Zustand des aus entartetem Gase bestehenden Sternes ist nach Fowler derjenige, der zu einem einzigen gigantischen Molekül streng analog ist, welches sich in seinem tiefsten Zustande befindet. In solchem Grenzzustande wird man von der Temperatur gar nicht sprechen dürfen, und man müsste daher eher sagen, dass die absolute Temperatur den Wert „Null" hat. Die Grenzdichte der sich in solchem Grenzzustande befindenden Sterne untersuchten E. C. Stoner[1], J. Frenkel[2], W. Anderson[3] und D. S. Kothari[4], unter Annahme der gleichmässigen Dichteverteilung innerhalb eines Sternes. Sie gingen dabei von der Bedingung aus, dass die Variation der Gesamtenergie (Gravitationsenergie plus kinetische Energie) nach Dichte verschwindet, und kamen zu dem Schluss, dass die Grenzdichte im allgemeinen von der Sternmasse abhängt.

Nun ist es von Stoner und anderen gezeigt worden, dass in der Zustandsgleichung des entarteten Gases der Druck der $4/3$ten oder $5/3$ten Potenz der Dichte proportional ist, je nachdem die relativistische Veränderlichkeit der Elektronenmasse eine wichtige Rolle spielt oder nicht. Mit Hilfe dieser Zustandsgleichung ist man imstande, den inneren Aufbau der Weissen Zwerge in Einzelheiten kennenzulernen, falls man von dem Gesetze in bezug auf sowohl den Absorptionskoeffizienten k als auch die Energieerzeugung ε sichere Kunde erhalten kann. Indem E. A. Milne[5] in seiner allgemeinen Analyse der Sternstruktur eine „Standard"-Modell betrachtet hat, welches sich durch k=konst. und ε=konst. kennzeichnen lässt, hat er die Fundamentalgleichung bei dem nicht-relativistisch entarteten Weissen Zwerge in eine *Emden*sche Polytrope mit Index $n=3/2$ gebracht. Das Problem des Weissen Zwergs als eine Polytrope ist auch von anderen Forschern[6] diskutiert worden.

§ 3. Solange wir uns mit einem „Standard"-Modelle oder mit einem anderen aber ihm äquivalenten Modelle, z. B. einem dem *Edding-*

1. E. C. Stoner, Phil. Mag. **7** (1929) 63; **9** (1930) 944.
2. J. Frenker, Zeits. f. Phys. **50** (1928) 244.
3. W. Anderson, Zeits. f. Phys. **56** (1929) 851.
4. D. S. Kothari, Phil. Mag. **11** (1931) 1130.
5. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **91** (1930) 1.
6. Vgl. E. C. Stoner und F. Tyler, Phil. Mag. **11** (1931) 986; S. Chandrasekhar, Phil. Mag. **11** (1931) 592, M. N. R. A. S. **91** (1931) 456, Astrophys. J. **74** (1931) 81, Zeits. f. Astrophys. **3** (1931) 302; E. C. Stoner, M. N. R. A. S. **92** (1932) 651: D. S. Kothari, Phil. Mag. **12** (1931) 665; S. Suzuki, Imp. Acad. Tokyo, Proc. **7** (1931) 307; u. s. w.

*ton*schen Sternmodelle ähnlichen, beschäftigen wollen, lässt sich die Dichteverteilung im Innern der Weissen Zwerge immer durch eine Verteilung von derjenigen polytropen Form darstellen, welche gekennzeichnet wird durch den Index $n=1.5$ oder 3, je nachdem auf die nicht-relativestische oder die relativistische Entartung bezogen wird. Wenn wir aber die Energieerzeugung oder den Absorptionskoeffizienten nicht für konstant halten sondern als eine im allgemeinen von der Dichte und der Temperatur abhängige Grösse annehmen, so wird die Theorie des inneren Aufbaues wesentlich anders. (Dies ist natürlich nicht nur bei den Weissen Zwergen sondern auch in der allgemeinen Analyse der Sternstruktur der Fall.) In dieser Abhandlung wollen wir, um den Einfluss der Verteilung der Energieerzeugungen auf den inneren Aufbau näher zu sehen, das „Standard"-Modell der Weissen Zwerge verallgemeinern, und zwar derart, dass der Index der Fundamentalgleichung anders als 1.5 wird. Man mag meinen, dass solcher Versuch nichts anders als von lauter rechnerischem Interesse sein wird. Aber er scheint mir doch auch noch eine nicht geringe Bedeutung zu haben, solange wir im gegenwärtigen Stande unserer Wissenschaften gar keine sichere Kunde von der Energieerzeugung im Innern der Sterne besitzen. Was den Absorptionskoeffizienten k betrifft, wollen wir ihn in dieser Abhandlung, wie bei dem „Standard"-Modelle, als konstant überall im Innern *eines* Sternes voraussetzen, was bedeutet, dass man in der ersten Annäherung von seinem durchschnittlichen Werte Gebrauch macht. Bei konstantem Absorptionskoeffizienten erweist sich die konstante Energieerzeugung als konstantes Verhältnis β des Gasdruckes zum Gesamtdrucke. Die Änderung von β bedeutet infolgedessen auch die der Energieerzeugung. In Verbindung mit der Theorie der aus gewöhnlichem Gase bestehenden Sterne hat E. A. Milne[1] zwischen dem Verhältnisse β und der Temperatur T eine Beziehung angenommen, nämlich, $\frac{1-\beta}{\beta^{4-s}} = \frac{1-\beta_c}{\beta_c^{4-s}} \left(\frac{T}{T_c}\right)^s$, wobei sich das Sufix „$c$" auf den Wert im Sternzentrum bezieht und s einen willkürlich zu wählenden Parameter bedeutet. Er hat hieraus als die Fundamentalgleichung eine Polytrope von Index $3-s$ anstatt 3 abgeleitet. Dieses Sternmodell steht natürlich im polytropen Gleichgewichte.

Einer der Verfasser dieser Abhandlung hat neulich eine Theorie

1. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **87** (1927) 708.

des inneren Aufbaues der Weissen Zwerge unter Annahme einer Beziehung zwischen der Dichte und der Energieerzeugung entwickelt[1]; es hat sich dabei nur um das nicht-relativistisch entartete Gas gehandelt. Wir wollen zuerst die vorgeschlagene Theorie in aller Kürze schildern, indem wir jedoch zugleich die Theorie derart verallgemeinern, dass sie auch auf den Fall der relativistischen Entartung angewendet werden kann. In Abschnitt II wollen wir uns näher mit den numerischen Berechnungen beschäftigen, um die Eigenschaften der Lösung des Problems klar zu machen, und im letzten Abschnitte soll die negative Energiequelle, die notwendigerweise in unserem Sternmodelle in Erscheinung tritt, betrachtet werden.

I. Die vorgeschlagene Theorie.

§ 4. Es seien p_R. p_G der Strahlungs- und der Gasdruck, ρ die Dichte und ε die in der Zeiteinheit erfolgende Energiebefreiung pro Einheitsmasse in irgendeinem Punkte, dessen Entfernung vom Zentrum des Sternes r ist. Dann, da wir den Absorptionskoeffizienten k als konstant vorausgesetzt haben, erweisen sich die Bedingungen für das Gravitations- sowie Strahlungsgleichgewicht als

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp_G}{dr}\right)+4\pi G\left(1-\frac{k\varepsilon}{4\pi Gc}\right)\rho=0, \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp_R}{dr}\right)+\frac{k\varepsilon}{c}\rho=0, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit und G die Gravitationskonstante bedeutet. Nun nehmen wir als die Abhängigkeit der Stärke der Energiequelle ε von der Dichte das Gesetz:

$$1-\frac{k\varepsilon}{4\pi Gc}=B\left(\frac{\rho_c}{\rho}\right)^{\sigma}, \ldots(3)$$

an, wo σ einen willkürlichen Parameter bedeutet, welcher ein Mass der Zentralverdichtung der Energiequellen gibt, und sich das Suffix „c" auf den Wert im Zentrum bezieht. Eine sich in dieser Annahme ergebende Schwierigkeit besteht in dem notwendigen Vorhandensein von negativen Energiequellen im äusseren Teile des Sternes. Solche Schwierigkeit scheint bei fast allen Sternmodellen, sogar auch bei dem *Eddington*schen, von dem Standard-Modelle abgesehen, unvermeidbar zu sein, was in Abschnitt III näher betrachtet werden soll. Wir machen weiter Gebrauch von der Zustandsgleichung des entarteten Gases, nämlich

1. T. Araki, Zeits. f. Astrophys. **8** (1934) 358.

$p_G = K_m \rho^{1+\frac{1}{m}}$, ...(4) wo K_m die sogenannte Entartungsgaskonstante bedeutet und $m = 3$ oder $3/2$ für die relativistische bzw. nichtrelativistische Entartung ist. Setzt man (3) und (4) in (1) ein und setzt man $m(1-\sigma) \equiv n$, ...(5) $\rho = \rho_c \psi^m$,.....(6)

$$r \equiv \xi \left\{ \frac{(1+m) K_m \rho_c^{\frac{1}{m}-1}}{4\pi G B} \right\}^{\frac{1}{2}}, \ldots(7)$$

so erhält man nach einigen algebraischen Berechnungen eine polytrope Gleichung von Index n:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi} \right) + \psi^n = 0. \quad \ldots\ldots(8)$$

Trotzdem die Gleichung polytrope ist, ist das Gleichgewicht nicht polytrope, weil die Dichte nicht zu ψ^n sondern zu ψ^m proportional ist.

§ 5. Um die Werte der Mittelpunktsdichte ρ_c und der Konstante B zu bestimmen, müssen wir für die Sternmasse M und die Gesamtausstrahlung L Ausdrücke finden. Die Masse $M(r)$, die innerhalb der Kugel von Radius r enthalten wird, erweist sich, wegen (6) und (7), als

$$M(r) = \frac{\rho_c^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\right)}}{\sqrt{4\pi}} \cdot \left\{ \frac{(1+m) K_m}{GB} \right\}^{\frac{3}{2}} \cdot \Phi(\xi), \quad \ldots\ldots(9)$$

wobei $\Phi(\xi)$ eine Funktion von ξ bedeutet, welche von den Parametern m und n abhängt, nämlich $\Phi(\xi) \equiv \int_0^\xi \xi^2 \psi(\xi)^m d\xi$. .....(10)

Um den Ausdruck für die Gesamtausstrahlung zu finden, erhält man aus (3) and (5)

$$\frac{k\varepsilon}{4\pi G c} = 1 - B\psi^{n-m} \quad \ldots\ldots(11)$$

und demgemäss

$$\frac{kL(r)}{4\pi G c} = M(r) - \frac{\rho_c^{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\right)}}{\sqrt{4\pi B}} \cdot \left\{ \frac{(1+m) K_m}{G} \right\}^{\frac{3}{2}} \Psi(\xi), \ldots(12)$$

wo $\Psi(\xi) \equiv \int_0^\xi \xi^2 \psi(\xi)^n d\xi = -\xi^2 \frac{d\psi}{d\xi}$ ...(13) ist. Wenn wir nun mit ξ_1 den Begrenzungswert von ξ bezeichnen, so erhalten wir aus (9) und (12) sofort für ρ_c und B die folgenden Ausdrücke:

$$\rho_c^{3\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{3}\right)} = \frac{4\pi G^3 \Phi(\xi_1) M^2 \left(1 - \frac{kL}{4\pi G c M}\right)^3}{(1+m)^3 K_m^3 \{\Psi(\xi_1)\}^3}, \quad \ldots\ldots(14)$$

$$B = \frac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)} \left\{ 1 - \frac{kL}{4\pi G c M} \right\} \quad \ldots\ldots(15)$$

Es ist hier zu bemerken, dass bei der relativistischen Entartung die Mittelpunktsdichte, wegen $m = 3$, unbestimmt bleibt, was bedeutet, dass

zwischen der Masse und der Gesamtausstrahlung L eine Beziehung besteht, nämlich eine Massen-Helligkeitsbeziehung:

$$M^2\left(1-\frac{kL}{4\pi GcM}\right)^3=\frac{(1+m)^3K_m^3\{\Psi(\xi_1)\}^3}{4\pi G^3\Phi(\xi_1)}=\text{eine Konstante},$$

welche für das „Standard"-Modell ($n=3$) mit der von S. Chandrasekhar[1] gegebenen Relation übereinstimmt. Mit Hilfe von (14) und (15) ist man imstande, die mittlere Dichte ρ_m, den Radius r_1 und die effektive Temperatur T_e zu berechnen; z. B. für ρ_m ergibt sich

$$\frac{\rho_m}{\rho_c}=\frac{3\Phi(\xi_1)}{\xi_1^3}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

§ 6. Um die Temperatur und das Verhältnis des Strahlungsdruckes zum Gesamtdrucke zu berechnen, müssen wir von der Gleichung (2) ausgehen. Setzt man $T=T_c\theta$, berücksichtigt man $p_R=\frac{1}{3}aT^4$, wo a die *Stefan*sche Konstante bedeutet, und definiert man ferner eine neue Funktion $\varphi(\xi)$ durch

$$1-\varphi(\xi)^{m+1}=(m+1)\int_0^\xi\psi(\xi)^m\frac{d\xi}{\xi^2}-\int_0^\xi\psi(\xi)^m\xi^2d\xi, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

so erhält man nach Integrationen

$$\theta^4+\frac{K_m\rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{a}{3}BT_c^4}\left\{1-\varphi(\xi)^{1+m}\right\}+\frac{K_m\rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{a}{3}T_c^4}\{\psi(\xi)^m-1\}=1. \quad \ldots(18)$$

Hieraus folgt, wegen der Randbedingungen: $\theta=0$ und $\psi=0$ für $\xi=\xi_1$, als die Mittelpunktstemperatur

$$T_c^4=\frac{3K_m\rho_c^{\frac{1}{m}+1}}{a}\left\{\frac{1-\varphi(\xi_1)^{1+m}}{B}-1\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

wo ρ_c und B durch (14) und (15) gegeben sind. Wenn man nächstens mit β das Verhältnis des Gasdrucks zum Gesamtdrucke bezeichnet, so erhält man aus (18) nach einer Reihe von algebraischen Rechnungen

$$\frac{B}{\beta}=\left\{\frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)}\right\}^{1+m}-\left\{\frac{\varphi(\xi_1)}{\psi(\xi)}\right\}^{1+m} \qquad \text{oder mittels (15)}$$

$$\beta=\frac{\psi(\xi)^{1+m}}{\varphi(\xi)^{1+m}-\varphi(\xi_1)^{1+m}}\cdot\frac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)}\cdot\left\{1-\frac{kL}{4\pi GcM}\right\}. \qquad \ldots\ldots\ldots(20)$$

Es ist leicht zu beweisen[2], dass das Verhältnis β im Zentrum minimal ist und nach aussen zunimmt und dass sein Begrenzungswert beträgt

1. S. Chandrasekhar, M. N. R. A. S. **91** (1931) 461.
2. Vgl. T. Araki, loc. cit. S. 266.

$\beta_1 = 1 - \frac{kL}{4\pi GcM}$, ...(21) welcher demjenigen konstanten Werte gleich ist, den β bei dem „Standard"-Modelle hat.

II. Numerische Betrachtungen.

§ 7. In diesem Abschnitte wollen wir die numerischen Berechnungen durchführen; dabei wollen wir aber nur den Fall der nicht-relativistischen Entartung (nämlich $n = 3/2$) ins Auge fassen. Eine der Fundamentalgleichungen unserer Theorie ist die Polytrope mit Index n; aber das Gleichgewicht selbst ist, wie schon oben erwähnt, kein polytropes, weil die Dichte ρ hier der $3/2$-ten Potenz der polytropen Funktion $\psi(\xi)$ proportional ist, während sie bei dem polytropen Gleichgewichte der $n$ten Potenz von $\psi(\xi)$ proportional sein soll. Um die Mittelpunktsdichte ρ_c und die Konstante B zu bestimmen, ist es also nötig, ausser $\Psi(\xi_1) = \xi_1^2 \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_1$ noch die durch (10) zu definierende Grösse $\Phi(\xi_1)$ zu kennen, und, um die Werte der Temperatur sowie des Strahlungsdruckes berechnen zu können, hat man die durch (17) definierte Funktion $\varphi(\xi)$ zu konstruieren. Bei dem „Standard"-Modelle, d. h. für $n = 3/2$ ($\sigma = 0$), stimmt natürlich $\Phi(\xi)$ mit $\Psi(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ mit $\psi(\xi)$ überein.

Ausführliche Tabellen der Lösungen der Fundamentalgleichung (8), welche den Bedingungen $\psi(0) = 1$ und $\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$ genügen, für eine Reihe von Werten von n sind in dem berühmten Buche „Gaskugeln" von R. Emden[1] gegeben. Es handelt sich nun für uns um die Werte von $\varphi(\xi)$ und $\Phi(\xi)$ auf Grunde der *Emden*schen Lösungen zu berechnen. Für den besonderen Fall $n = 0$ lassen sich $\Phi(\xi)$ und $\varphi(\xi)$ lediglich durch Kombinationen von trigonometrischen Funktionen ausdrücken, nämlich, mittels $\theta = \arcsin(\xi/\sqrt{6})$,

$$\Phi(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{32}\{12\theta + 3\sin 2\theta - 3\sin 4\theta - \sin 6\theta\},$$

$$\varphi(\xi)^{\frac{5}{2}} = \frac{45}{64}\theta^2 + \frac{15}{64}\theta(\sin 2\theta + 4\cot\theta) + \frac{385}{512}\cos 2\theta$$
$$+ \frac{5}{32}\cos 4\theta + \frac{15}{512}\cos 6\theta + \frac{5}{2048}\cos 8\theta - \frac{1797}{2048}.$$

Für die anderen Fälle hat man das Integral mechanisch auszuführen. In Tabellen 1, 2 und 3 sind die Ergebnisse der Berechnungen für die Fälle $n = 1$, 0.5 bzw. 0 zusammengestellt.

1. R. Emden, Gaskugeln, Leipzig, 1907, SS. 77–83.

Tabelle 1

$\left(n=1,\ \sigma=\frac{1}{3}\right)$

ξ	ψ	Ψ	Φ	$\psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0.751	1
0.2	0.99335	0.0027	0.0027	0.9835	0.9835	.752	0.994
0.4	.97355	.0210	.0208	.9352	.9354	.756	.976
0.6	.94107	.0694	.0682	.8591	.8604	.762	.948
0.8	.89670	.1600	.1550	.7614	.7650	.771	.908
1.0	.84147	.3012	.2865	.6495	.6576	.783	.859
1.2	.77670	.4972	.4627	.5317	.5467	.797	.799
1.4	.70389	.7475	.6780	.4157	.4401	.814	.732
1.6	.62473	1.0463	.9214	.3085	.3442	.833	.657
1.8	.54103	1.3828	1.1782	.2153	.2634	.855	.576
2.0	.45465	1.7416	1.4312	.1394	.1998	.879	.490
2.2	.36750	2.1031	1.6630	.0819	.1534	.905	.401
2.4	.28144	2.4452	1.8578	.0420	.1225	.931	.311
2.6	.19827	2.7434	2.0040	.0175	.1042	.958	.220
2.8	.11964	2.9732	2.0958	.00495	.0952	.98	.125
3.0	.04704	3.1111	2.1362	.00048	.0921	—	—
π	.00000	π	2.1415	.00000	.0917	1	0

Tabelle 2

$\left(n=0.5,\ \sigma=\frac{2}{3}\right)$

ξ	ψ	Ψ	Φ	$\psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0.553	1
0.2	0.994	—	0.0026	0.984	0.9841	.556	0.993
0.4	.9734	0.0212	.0206	.9349	.9370	.561	.975
0.6	.9405	.0707	.0680	.8579	.8625	.570	.947
0.8	.8951	.1652	.1546	.7579	.7676	.584	.904
1.0	.8375	.3165	.2857	.6420	.6610	.602	.851
1.2	.7687	.5338	.4598	.5181	.5517	.625	.787
1.4	.6896	.8227	.6702	.3949	.4484	.655	.712
1.6	.6013	1.1843	.9034	.2803	.3580	.690	.628
1.8	.5050	1.6140	1.141	.1813	.2851	.732	.535
2.0	.4026	2.0999	1.361	.1028	.2318	.782	.434
2.2	.2957	2.6198	1.543	.0476	.1975	.838	.326
2.4	.1869	3.1371	1.668	.0151	.1792	.895	.216
2.6	.0791	3.5870	1.729	.0018	.1722	—	—
2.7528	0.0000	3.7561	1.739	0.0000	0.1714	1	0

Tabelle 3

($n = 0$, $\sigma = 1$)

ξ	Ψ	Ψ	Φ	$\Psi^{\frac{5}{2}}$	$\varphi^{\frac{5}{2}}$	β/β_1	$\theta(\beta_1=1)$
0	1	0	0	1	1	0.385	1
0.31972	0.98297	0.01089	0.01073	0.95795	0.95827	.390	0.984
0.63398	.93301	.08494	.07988	.84085	.84553	.406	.937
0.93738	.85355	.27455	.23933	.67309	.69344	.432	.862
1.2248	.75000	.61237	.48096	.48714	.53915	.472	.765
1.4912	.62941	1.1052	.76232	.31429	.41138	.525	.650
1.7321	.50000	1.7321	1.0276	.17678	.32286	.592	.526
1.9433	.37059	2.4463	1.2324	.083606	.27150	.673	.400
2.1213	.25000	3.1820	1.3597	.031250	.24696	.763	.279
2.2630	.14645	3.8632	1.4201	.0082073	.23773	.853	.172
2.3660	.066987	4.4151	1.4395	.0011614	.23525	.930	.086
2.4285	.017037	4.7743	1.4428	3.789×15^{-5}	.23489	.982	.026
2.4495	0	4.8990	1.4429	0	.23489	1	0

§ 8. Mit Hilfe der in den obigen Tabellen gegebenen Begrenzungswerte von ξ, $\Psi(\xi)$ und $\Phi(\xi)$ ist man imstande, die Dichte, den Radius und die effektive Temperatur zu berechnen; nämlich, aus (14) und (16) die Mittelpunkts- und die mittlere Dichte, nach der Formel $M=\frac{4}{3}\pi r_1^3\rho_m$ den Radius r_1 und nach $\pi a c r_1^2 T_e^4 = L$ die effektive Temperatur. Die Resultate der Berechnungen sind in Tabelle 4 zusammengestellt; dabei ist jede Grösse, zum Vergleiche, durch die entsprechende Grösse bei dem „Standard"-Modelle dividiert, auf das sich der Strich bezieht.

Tabelle 4

n	1	0.5	0
ρ_c/ρ_c'	0.5101	0.2367	0.09063
ρ_m/ρ_m'	0.6341	0.3551	0.1601
r_1/r_1'	1.164	1.412	1.841
T_e/T_e'	0.9269	0.8415	0.7369

Die Mittelpunktstemperatur T_c wird durch (19) gegeben; sie ist natürlich von der Grösse $1-\beta_1=\frac{kL}{4\pi GcM}$ abhängig. Wenn man als erste Approximation diese Grösse Null setzt, so kann man leicht beweisen, dass sie zu $\Theta \equiv \frac{\{\Phi(\xi_1)\}^{\frac{1}{6}}\{\Psi(\xi_1)[1-\varphi(\xi_1)^{\frac{5}{2}}]-\Phi(\xi_1)\}^{\frac{1}{4}}}{\{\Psi(\xi_1)\}^{\frac{5}{4}}}$ proportional ist. Der Mittelpunktswert von β wird aus (20) ermittelt, indem man dort $\varphi(o)=\psi(o)=1$ setzt. In Tabelle 5 sind die Werte von ρ_c/ρ_m, Θ und β_c/β_1 gegeben.

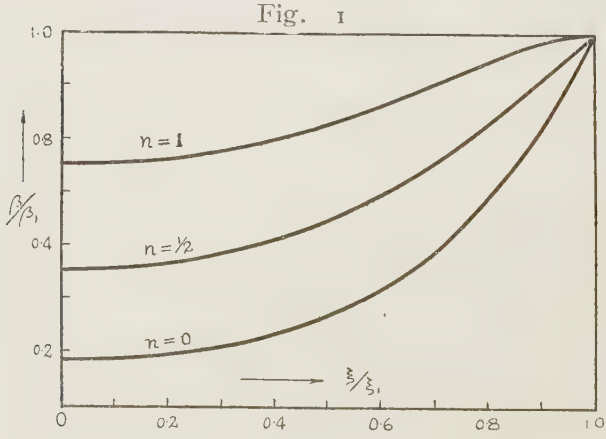
Tabelle 5

n	ρ_c/ρ_m	Θ	β_c/β_1
1.5 (Standard)	6.000	—	1
1	4.826	0.2493	0.7506
0.5	3.999	0.2258	0.553
0	3.395	0.1797	0.3849

Insgesamt können wir den Einfluss der zentralen Verdichtung der Energieerzeugung auf den inneren Aufbau der nicht-relativistisch entarteten Weissen Zwerge folgendermassen zusammenfassen: Je kleiner der Index n der Fundamentalgleichung ist, um so stärker, wie es aus (3) und (5) klar ist, verdichten sich die Energiequellen gegen das Zentrum. Je stärker also die Zentralverdichtung der Energiequellen ist, desto kleiner sind die zentrale sowie die mittlere Dichte, desto homogener wird die Dichteverteilung, desto grösser der Radius und der Mittelpunktswert des Verhältnisses des Strahlungsdruckes zum Gesamtdrucke und desto tiefer die effektive Temperatur. Was die zentrale Temperatur betrifft, können wir nichts von den Einzelheiten sprechen, weil wir nur die Annäherung $1-\beta_1=0$ betrachtet haben, aber sie scheint mit n abzunehmen. Der Einfluss ist am stärksten bei der zentralen Dichte, jedoch nicht zu gross. Da man aber andererseits wohl vermuten darf, dass die Zentralverdichtung der Energiequellen bei den Weissen Zwergen nicht allzu gross sei, so mag man, grob genommen, auch sagen können, dass sie den inneren Aufbau dieser Sterne nicht zu beträchtlich beeinflusst.

§ 9. Die Verteilungen des Vernältnisses β und der Temperatur θ im Innern eines Weissen Zwergs sind in der vorletzten und der letzten Spalte von Tabellen 1, 2 und 3 gegeben. Die Werte von ε lassen sich aus (11) ermitteln; aber hier sind die Energiebefreiungen pro Einheitsvolumen $E \equiv \dfrac{k\varepsilon\psi^{\frac{3}{2}}}{4\pi Gc} = \psi^{\frac{3}{2}} - \psi^n \dfrac{\Phi(\xi_1)}{\Psi(\xi_1)} \cdot \left\{1 - \dfrac{kL}{4\pi GcM}\right\}$,

Fig. 1



anstatt pro Einheitsmasse berechnet worden. (Tabelle 6.) Die Verteilung von β ist in Fig. 1 und die von E in Fig. 2 veranschaulicht.

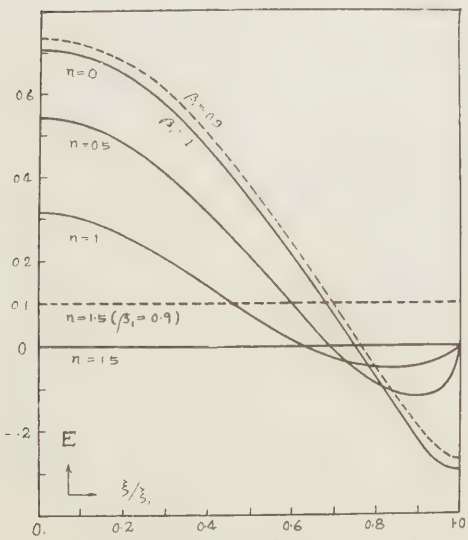
Tabelle 6, Verteilung von E

$n=1$		$n=0.5$		$n=0$		
ξ	$E(\beta_1=1)$	ξ	$E(\beta_1=1)$	ξ	$E(\beta_1=1)$	$E(\beta_1=0.9)$
0	0.3138	0	0.5407	0	0.70548	0.73493
0.2	.313	0.2	.534	0.3197	.681	.710
0.4	.295	0.4	.508	0.6340	.607	.633
0.6	.261	0.6	.469	0.9374	.494	.523
0.8	.237	0.8	.414	1.2248	.356	.384
1.0	.198	1.0	.346	1.4912	.205	.234
1.2	.155	1.2	.272	1.7321	.059	.089
1.4	.111	1.4	.193	1.9433	− .069	− .040
1.6	.068	1.6	.119	2.1213	− .169	− .140
1.8	.029	1.8	.032	2.2630	− .238	− .209
2.0	− .003	2.0	− .036	2.3660	− .278	− .246
2.2	− .028	2.2	− .089	2.4285	− .292	− .263
2.4	− .038	2.4	− .118	ξ_1	− .29452	− .26507
2.6	− .047	2.6	− .107			
2.8	− .040	ξ_1	0			
3.0	− .022					
ξ_1	0					

III. Über die negative Energiequelle

§ 10. Im Ausgangspunkte unserer Theorie haben wir zwischen der Energieerzeugung und der Dichte die Beziehung (3) angenommen. Da ε für $\sigma=0$ ($n=1.5$) konstant ist, gilt die Annahme (3) als eine Art Verallgemeinerung des „Standard"-Modelles. Aber solcher Annahme stellt sich, von $\sigma\leqq 0$ abgesehen, eine Schwierigkeit entgegen, welche darin besteht, dass die negativen Energiequellen unvermeidbar auf dem äusseren Gebiete des Sternes stattfinden, wo die Dichte kleiner als ein gewisser Wert ist. In der Tat verschwindet ε, nach den im vorhergehenden Abschnitte gegebenen Berechnungen, für folgende ξ_0 und ausserhalb dieses Punktes ist ε überall negativ bis zur Oberfläche; nämlich, in der Annäherung $1-\beta_1=0$, für $n=1$, $n=0.5$, $n=0$, beziehungsweise $\xi_0=$ 1.9769, 1.893, 1.82865, oder $\xi_0/\xi_1=.63$, .69, .73. Der Wert von ξ_0 wird durch den von $1-\beta_1$ nicht viel beeinflusst; z. B. bei $n=0$ beträgt ξ_0 1.87727 für $1-\beta_1=0.1$.

Fig. 2



Die Energiebefreiung pro Einheitsmasse ε strebt nach einer negativen Unendlichkeit an der Begrenzung. Das ist aber bei der Energiebefreiung pro Einheitsvolumen nicht der Fall, weil auch die Dichte an der Oberfläche derart verschwindet, dass $\varepsilon\psi^{\frac{3}{2}}$ dort endlich bleibt, wie in Tabelle 6 gezeigt. Beim gegenwärtigen Stande unseres Wissens ist uns so gut wie gar nichts bekannt von dem Mechanismus, durch welchen die Strahlungsenergie im Innern der Sterne erzeugt wird. Es liegt heute sehr nahe zu glauben, dass sich die kolossale Quantität der Energiestrahlung der Sterne sowie die Lebensdauer unserer Sonne durch die üblichen in der Physik bekannten Vorgänge, z. B. Gravitationsenergie, Radioaktivität usw. keineswegs können erklären lassen. Wenn man nun an solche Beobachtungsangabe, wie die allmähliche Abnahme der Sternmasse entlang der „Hauptsequenz" denkt, so scheint die Ansicht sehr plausibel zu sein, dass die Strahlungsenergie im Innern der Sterne durch die „Annihilation" der Materie entsteht, —nach poetischer Ausdrucksweise ist die Strahlungsenergie etwa ein sehr geheimnisvoller aus derjenigen Asche wiedergeborener Phönix, die das „Brennen" der Materie ins „Nichts" zur Folge hat. Was für Gesetze die Annihilation der Materie befolgt, wird ein sehr interessantes Problem sein, das sich wohl erst durch den zukünftigen Fortschritt der gerade in der Gegenwart sich entwickelnden Kernphysik erklären lassen wird. Wenn man aber daran denkt, dass man nach der Relativitätstheorie so wohl die Energie als auch die Masse sozusagen für eine „Phase" oder einen „Zustand" eines allgemeineren Begriffes halten darf, so mag es nicht unzulässig sein, zu vermuten, dass unter Umständen nicht nur sich die „Masse" durch einen Annihilationsvorgang in „Strahlung" *verdampft*, sondern in umgekehrter Richtung auch sich die „Strahlung" durch einen Materialisierungsvorgang in „Masse" *verstarrt*. Dieser letztere Vorgang entspricht ja der negativen Energiequelle. Nach solcher Denkweise könnte man auch die negative Energiequelle für möglich halten.

§ 11. Der negativen Energiequelle begegnen wir bei manchen Sternmodellen. Das ist, wie E. A. Milne[1] gezeigt hat, auch bei dem *Eddington*schen Modelle der Fall. Die Annahme, die das *Eddington*sche Modell charakterisiert, besteht in der Relation $\eta k = \text{konst.}$[2], wo k den Absorptionskoeffizienten in einem vom Zentrum um r entfernten Punkte bedeutet und η durch $\frac{4\pi}{M(r)}\int_0^r \varepsilon\rho r^2 dr$ definiert wird. Nach

1. E. A. Milne, M. N. R. A. S. **87** (1927) 708.
2. A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne, Kap. VI.

der Ansicht von Eddington scheint der innere Aufbau der Sterne im allgemeinen ganz unempfindlich gegen sehr starke Änderungen der willkürlich anzunehmenden Verteilung der Energiequellen zu sein. Wenn dies in Wirklichkeit der Fall ist, so liegt es wohl nahe, dass die Annahme $\eta k = \text{konst.}$, wie Eddington behauptet, als eine erste Annäherung gilt. Trotzdem enthält sie eine sehr unnatürliche Eigentümlichkeit, vom rein mathematischen Standpunkte aus gesehen. Nun gilt die Gleichung $k\eta = \text{konst.}$ als die Bedingung dafür, dass ein Stern im polytropen Gleichgewichte steht. Die Verteilung der Energiequellen muss infolgedessen durch diese Gleichung eindeutig bestimmt werden, damit der Stern eine polytrope Gaskugel ist. Wenn man nun von dem *Kramers-Eddington*schen Gesetz[1] des Absorptionskoeffizienten, nämlich $k \propto \rho / T^{\frac{7}{2}}$ Gebrauch macht, so kann man nach der *Eddington*schen Theorie leicht herleiten

$$\varepsilon \propto \psi^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\psi^{-\frac{7}{2}}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2.$$

Hieraus berechnet. kommen wir zu dem Schluss, dass ε sowie E für den Punkt $\xi/\xi_1 = 0.43$ verschwinden und ausserhalb dessen überall negativ sind, um auf der Oberfläche eine negative Unendlichkeit zu erreichen. Die Verläufe von ε und E sind in Fig. 3 veranschaulicht. Nach den oben erwähnten, ist es selbstverständlich, dass das *Eddington*sche Modell, rein mathematisch genommen, derart konstruiert ist, dass sich die positive Energieerzeugung nur auf ein so kleines Gebiet um das Zentrum, wie 8% vom ganzen Volumen des Sternes beschränken lässt, während in dem grösseren Teile überall die negative Energiequellen herrschen. Solche Schwierigkeiten stellen sich manchmal

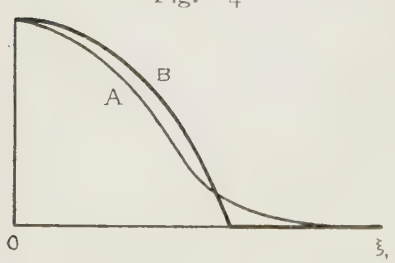
Fig. 3

1. Vgl. A. S. Eddington, loc. cit. Kap. IX.

der hydrodynamischen Untersuchung des höchst idealisierten Problems entgegen. Ein anderes Beispiel hiervon wird auch vom *v. Zeipel*schen Theorem[1] dargeboten, das lautet, dass, wenn sich ein wie ein fester Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierender Stern im sowohl Gravitations- als auch Strahlungs-Gleichgewichte befindet, so die Stärke der Energiebefreiung in allen Punkten seines Innern zu $1-\frac{\omega^2/2\pi G}{\rho}$ proportional ist. Es mag nicht uninteressant sein, hier nebenbei zu bemerken, dass der *v. Zeipel*sche Satz zu dem Fall $\sigma=1$ unserer Annahme (3) formal analog ist, obwohl beide Theorien mit ganz anderen Sachen zu tun haben.

§ 12. Wie oben erwähnt, mag es unter Umständen nicht allzu unnatürlich sein, das Vorhandensein der negativen Energiequellen zu vermuten. Aber es ist auch leicht, sie dadurch aus dem Wege zu räumen, dass man ausserhalb eines Kernes, in dem die Energieerzeugung das Gesetz (3) bis zu dem ihrem Verschwinden entsprechenden Punkte befolgt, einen keine Energie befreienden Teil annimmt[2]. Solches Modell der Weissen Zwerge wird wohl für eine Annäherung der Wirklichkeit gehalten; denn es liegt sehr nahe, dass in den äusseren Schichten der Sterne sich keine Energiequelle befindet und dass man, je näher man dem Zentrum kommt, um so stärkere Energiebefreiung findet, wie es in Fig. 4 durch die Kurve A schematisch veranschaulicht wird, während unsere Annahme der Kurve B entspricht. Es handelt sich dann um ein „Fit"-Problem, dessen Lösungen sich durch eine Reihe von *Fowler-Milne*schen Lösungen von zusammengeklapptem Typus der polytropen Gleichung mit Index $n=3/2$ geben lassen.

Fig. 4



Wir haben uns in dieser Abhandlung nur mit dem aus nichtrelativistisch entartetem Gase bestehenden Weissen Zwerge beschäftigt. Für die relativistische Entartung ist m gleich 3. In diesem Falle erweist sich die Mittelpunktsdichte, wie in § 5 gezeigt, als unbestimmt und man erhält ein „Massen-Luminosität"-Relation, welche im Falle des verschwindenden Wertes von $1-\beta_1$ eine Grenzmasse des entart-

1. H. v. Zeipel, M. N. R. A. S. **84** (1924) 665.
2. Vgl. T. Araki, Zweite Mitteilung, Zeits. f. Astrophys. **9** (1934) 163.

eten Gassternes gibt. Es wird vielleicht in der Natur keinen Stern geben, welcher vom Zentrum bis zur Oberfläche aus lauter relativistisch entartetem Gase besteht. Es mag also auch interessant sein, vom theoretischen Standpunkte aus gesehen, ein Modell des Weissen Zwerges, dessen Materie in der Umgebung des Zentrums relativistisch entartet ist und nach dem Gesetze (3) die Strahlungsenergie befreit, und dessen äusserer Teil aus nicht-relativistisch entartetem keine Energie befreienden Gas aufgebaut wird, zu konstruieren.

Zum Schlusse möchten die Verfasser der Stiftung „Hattori-Hôkô-Kwai" für ihre wirtschaftliche Hilfe herzlichen Dank auszusprechen.

Kyoto, Institut für Astrophysik, Februar 1935.

A Fundamental Investigation of Motion of a Vertically Constrained Gyroscope

By **Shigeharu Nitta**

(Received March 24, 1935)

Abstract

For a vertically constrained ship's gyroscope, which is affected by gravitation, the rotation of the earth, the speed and the course of the ship, the writer derived the equations of motion starting from the fundamental equation

Torque = Angular momentum × rate of precession,

and compared their solutions with the experimental data which were obtained by means of a simple apparatus. Both results coincided well within the limit of experimental error.

I. Theory

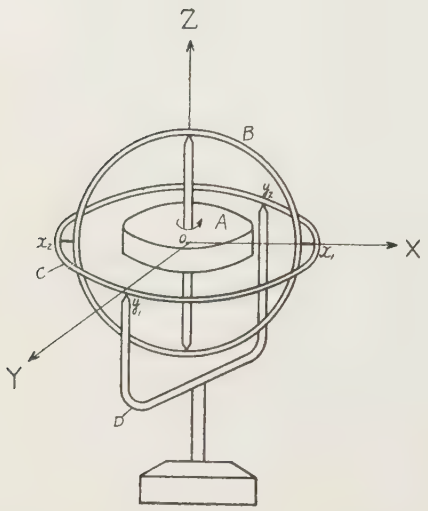
1. Undamped oscillation

Neglecting the friction at the bearings and resistances against the motion of the gyroscope, we investigate the motion of the axis of the gyroscope by taking into consideration the influences of the earth's rotation and of the speed and the course of the ship on which the gyroscope is carried.

(A) **The equations of motion and their solutions** :- The vertically constrained gyroscope is represented schematically by Fig. 1. Gyroscope A is held by a ring B at both ends of the axis of gyration, the ring B is supported by a ring C at the points x_1 and x_2, and the ring C by a ring D at the points y_1 and y_2. Straight lines x_1 x_2 and y_1 y_2 intersect at a point O in the horizontal plane XY. The centre of gravity of the gyroscope is below the point O, and when the axis of gyration incilines the gravity acts so as to keep it vertical. Let the fulcrum O of the oscillation be the origin of the rectangular coordinates X, Y and Z, the transversal axis of the ship the X-axis (positive to the portside), the longitudinal axis of the ship the Y-axis (positive to the bow) and the vertical direction the Z-axis (positive upwards). The meaning of the various notations used in the present paper are explained below :—

α : The component of the angle between the axis of the gyroscope and the OZ-axis in the ZX-plane (positive when the upper end of the

Fig. 1



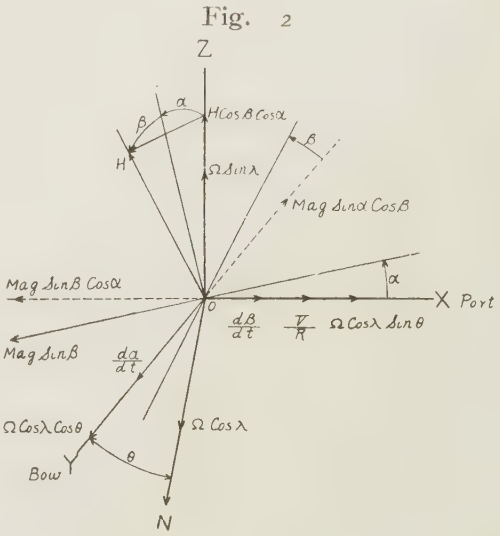
axis inclines to starboard). β: The component of the angle between the axis of the gyroscope and the OZ-axis in the ZY-plane (positive when the upper end of the axis inclines to the bow). θ: The course of the ship (measured from the north eastwards as positive). Ω: The angular velocity of the earth's rotation. λ: The latitude at the place where the gyroscope is. V: The speed of the ship. a: The distance between O and the centre of gravity of the gyroscope with the ring B. a': The distance between O and the centre of gravity of the gyroscope with the rings B and C. g: The acceleration of the earth's gravitation. R: The radius of the earth at the place where the gyroscope is. M: Mass of the gyroscope with the ring B. M': Mass of the gyroscope with the rings B and C. H: The angular momentum of the gyroscope (product of the number of revolution per second and the moment of inertia with respect to the axis of gyration).

If a torque K acts upon a rotating body having an angular momentum H, and when the two vectors, K and H, are perpendicular to each other, then its axis of gyration follow the vector K by the shortest path. This motion is called precession, and if its angular velocity is Θ, then

$$K = H\Theta \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Let us apply this relation to the precession of our gyroscope about the Y-axis (Fig. 2). The angular momentum

Fig. 2



is $H\cos\alpha\cos\beta$, the torque $Mag\sin\beta\cos\alpha$ and angular velocity of precession $\frac{d\alpha}{dt}+\Omega\cos\lambda\cos\theta$. Hence follows the equation of motion

$$Mag\sin\beta\cos\alpha=H\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{d\alpha}{dt}+\Omega\cos\lambda\cos\theta\right).$$

Similarly the precession about the X-axis is given by

$$M'a'g\sin\alpha\cos\beta=-H\cos\alpha\cos\beta\left(\frac{d\beta}{dt}+\Omega\cos\lambda\sin\theta+\frac{V}{R}\right).$$

If α and β are so small, that they satisfy $\sin\alpha=\alpha$, $\cos\alpha=1$, $\sin\beta=\beta$ and $\cos\beta=1$, then

$$Mag\cdot\beta=H\left(\frac{d\alpha}{dt}+\Omega\cos\lambda\cos\theta\right),\quad M'a'g\cdot\alpha=-H\left(\frac{d\beta}{dt}+\Omega\cos\lambda\sin\theta+\frac{V}{R}\right). \quad (2)$$

Suppose that only α and β are the functions of time. Then eliminating β from equation (2), we obtain

$$X\frac{d^2\alpha}{dt^2}+Y\alpha+Z=0,$$

where $$X\equiv\frac{H^2}{Mag},\qquad Y\equiv M'a'g,\qquad Z\equiv H\left(\Omega\cos\lambda\sin\theta+\frac{V}{R}\right).$$

Equation (3) shows that α changes its value oscillatory with the lapse of time. X is the inertia of this motion, Y the coefficient of stability and Z the constant which determines the position of equilibrium. Substituting in equation (3) $\alpha=A\sin nt+c$ as a particular solution, we obtain

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=A\sin\frac{2\pi}{T_0}t+\alpha_0,\qquad T_0=\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi H}{\sqrt{Mag\cdot M'a'g}},\\&\alpha_0=-\frac{H(\Omega\cos\lambda\sin\theta+V/R)}{M'a'g}.\end{aligned}\right\}\ldots(4)$$

From the equation (2) and (4)

$$\beta=kA\cos\frac{2\pi}{T_0}t+\beta_0,\quad \beta_0=\frac{H\Omega\cos\lambda\cos\theta}{Mag},\quad k=\sqrt{\frac{M'a'}{Ma}}. \quad \ldots(5)$$

The simultaneous equations (4) and (5) represent an ellipse (if $k>1$ its major axis is $2kA$ and if $k<1$ its major axis is $2A$) and its centre is at the distance of $\alpha=\alpha_0$ and $\beta=\beta_0$ from the origin (Fig. 3.) This ellipse is the projection on the horizontal plane of the locus traced by the upper end of the axis of the gyroscope. Specially when Ma is equal to $M'a'$ the locus becomes a circle. A and kA are determined from the initial position of the axis. If the gyroscope starts when its axis is at $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$ and $A=0$, the axis will keep the same position. As α_0 and β_0 are to be evaluated from the elements of the design of the gyroscope, the course and the speed of the ship, we

can determine the vertical line in the ship by the position of the axis of the gyroscope even if the ship rolls or inclines.

Now we divide α_0 into two parts

$$\alpha_0=\alpha_0'+\alpha_0'', \quad \alpha_0'=-\frac{H\Omega\cos\lambda\sin\theta}{M'a'g}, \quad \alpha_0''=-\frac{HV/R}{M'a'g}. \qquad \ldots(6)$$

α_0 is determined by the latitude and the course of the ship and α_0'' by the speed. If $M'a'=500$ cm. g., $H=1{,}13\cdot10^8$ C. G. S., then

$\alpha_0'\fallingdotseq-(57\cos\lambda\sin\theta)'$, $\alpha_0''\fallingdotseq-(0.063V)'$ (V in knots).

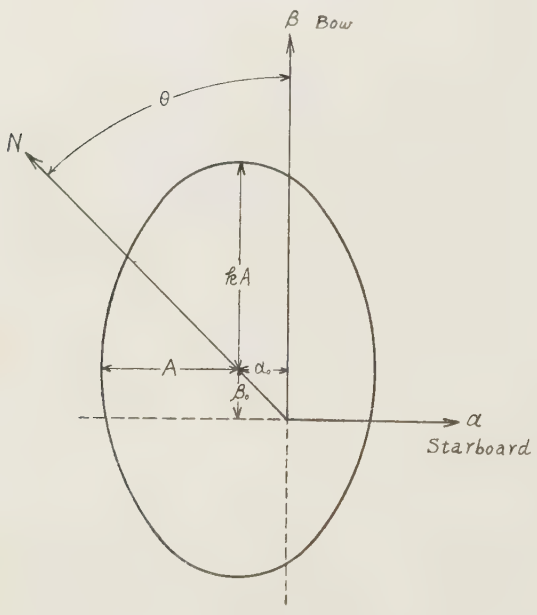
If we substitute $\alpha=\alpha_0$ and $\beta=\beta_0$ as the initial conditions, and $\theta=0$ in the equations (4) and (5), then

$\alpha=\alpha_0''\fallingdotseq 0$, $\beta=\dfrac{H\Omega\cos\lambda}{M'a'g}$, i. e. the axis rests inclining its upper end to the north by β, which may be called the latitude error. In such case the axis is really making a precessional motion so as to incline its upper end to the east by the torque $Mag\cdot\beta=H\Omega\cos\lambda$ and this precessional motion is cancelling the inclination due to the earth's rotation. Therefore if we lay a weight m on the case of the gyroscope at a point south of the centre of the axis, and make m satisfy the equation $mlg=H\Omega\cos\lambda$, where l is the distance between m and the centre of the axis, then the axis will rest vertically. Thus if we change ml properly according to the change of λ and turn the gyroscope by using a gyro-compass, so that the point of action of m on the case of the gyroscope is always to the south, then the equations (4) and (5) become

$\alpha_0=0$, $\beta_0=0$.

These are obvious too from the equation of motion (1). When, by putting m, we supply to the gyroscope the torques

Fig. 3



$ml_g(\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\alpha\sin\beta)$ about X-axis, $ml_g(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha\sin\beta)$ about Y-axis, the equations of motion become

$$\frac{H^2}{Ma_g}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+M'a'g\cdot\alpha+H\frac{V}{R}=0,\qquad \frac{H^2}{M'a'g}\frac{d^2\beta}{dt^2}+Ma_g\cdot\beta=0.$$

(B) The influence of the external forces:—As explained in the former article the end of the axis of the gyroscope traces the arc of an ellipse when it inclines for any cause. Disregarding this elliptic motion by assuming that the time interval during which the external force is acting on the gyroscope is negligibly small compared with the period of the elliptic motion, we consider only the inclination which is directly caused by the influence of the external forces.

(a) Change of the speed of the ship. When the speed of the ship increases or decreases the acceleration acts upon the gyroscope in a direction parallel to the longitudinal axis of the ship and the gyroscope makes a precessional motion parallel to the transversal axis. If we denote the acceleration by γ, then from equation (1)

$$-H\frac{d\alpha}{dt}=Ma\gamma,\qquad \therefore\quad \alpha_1=-\frac{Ma}{H}\int_{t_1}^{t_2}\gamma dt,$$

where α_1 is the maximum inclination caused by the change of the speed. Supposing that $\gamma=\dfrac{V_2-V_1}{t_2-t_1}$[1], we obtain by integration

$$\alpha_1=-\frac{Ma}{H}(V_2-V_1),\quad \text{.....(7)}$$

when the speed varies from V_1 to V_2 in a time interval (t_2-t_1). For example, in the case of $Ma=500$ cm. g., $H=1{,}13\cdot10^8$ C. G. S., $V_2-V_1=20$ knots, we get $\alpha_1\fallingdotseq 15'$.

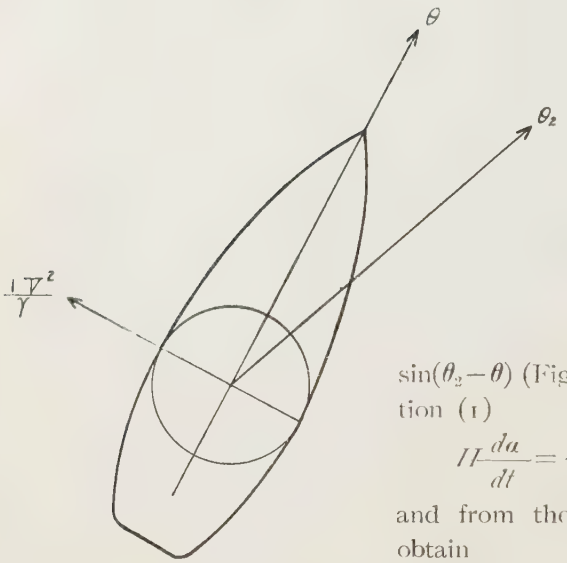
(b) Turning of the ship. Here we shall inquire into the influence of the centrifugal force which act upon the gyroscope during the turning under the following conditions.

1. The decrease of the speed during the turning is neglected.
2. The turning circle has a uniform radius r.
3. The time needed to turn is negligibly small compared with the period T_0.
4. $Ma=M'a'$.

When the ship turns at a speed V, the centrifugal force acts upon

1. If $t_2-t_2\ll T_0$ then we can assume that γ is constant.

Fig. 4



the gyroscope parallel to the transversal axis of the ship. In our case the X- and Y-axes are fixed to the ship, and they turn with the ship. The component of the moment of the centrifugal force in the final course θ_2 is $Ma\frac{l^2}{r}\sin(\theta_2-\theta)$ (Fig. 4), therefore from equation (1)

$$H\frac{d\alpha}{dt}=-Ma\frac{l^2}{r}\sin(\theta_2-\theta),$$

and from the conditions 1 and 2 we obtain

$$\alpha=-\frac{MaV}{H}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin(\theta_2-\theta)d\theta=\frac{MaV}{H}\{\cos(\theta_2-\theta_1)-1\}, \quad \ldots(8a)$$

where θ_1 and θ_2 are the initial and final course respectively. Similarly

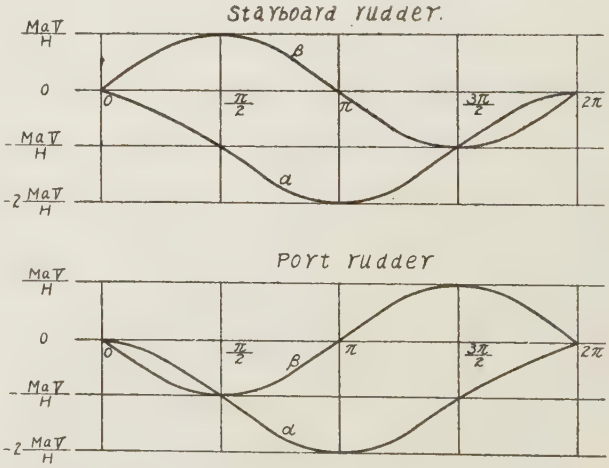
$$\beta=\frac{MaV}{H}\sin(\theta_2-\theta_1). \quad \ldots(8b)$$

The variations of α and β with the turning angle $\theta_2-\theta_1$ are as shown in Fig. 5. In the case of $Ma=500$ cm. g., $H=1{,}13\cdot10^8$ C. G. S., $V=30$ knots, the maximum values of α and β are

$$2\frac{MaV}{H}\doteqdot46',$$

$$\frac{MaV}{H}\doteqdot23'.$$

Fig. 5

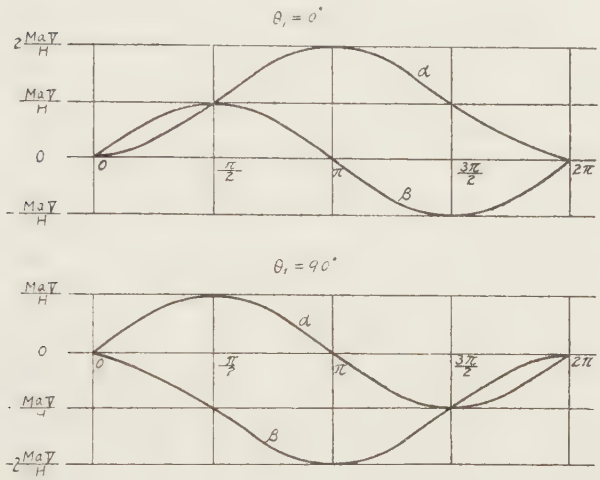


By the turning, if we rotate the gyroscope properly so that its axis of α-inclination coincides with the meridian, then

$$\alpha = \frac{MaV}{H}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2), \quad \beta = \frac{MaV}{H}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \quad \ldots(8')$$

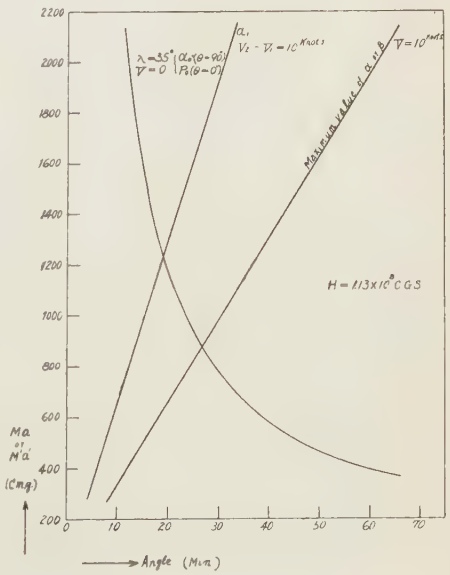
The variations of α and β with the turning angle in the cases of $\theta_1 = 0^0$ and $\theta_1 = 90^0$ are as shown in Fig. 6. It we compare these two cases, we see that in the former α and β depend upon the turning angle and are independent of the initial and final courses, but in the latter they vary with them, and that in both cases they depend only upon the speed and not at all upon the radius of turning or its angular velocity.

Fig. 6



(c) Rolling and pitching and vibration. If the amplitude of rolling, pitching or vibration is strictly a sine or cosine function of time, then the larger the period of the proper os cillation of the gyroscope in comparison with their period, the smaller their influence on the gyroscope. Actually the relationship is not so simple, but their influence is different according to the construction of the gyroscope, and it would appear to be possible to avoid their influence by properly designing the mechanism of the gyroscope. The most important constants of the gyroscope are its angular momentum and the coefficient of moment of gravitation (Ma and $M'a'$). We know from equation (3) that $M'a'g$ is the coefficient

Fig. 7



of stability in regard to Y-axis (α-inclination). Hence the greater Ma and $M'a'$, the smaller α_0 and β_0, i. e. the gyroscope becomes more stable. But equations (7), (8) and (8') show that the inclination caused by a change of speed or course is proportional to Ma or $M'a'$. The period of the oscillation varies with Ma and $M'a'$, and as before stated, it is affected by the rolling or the vibration. Therefore the determination of the value of Ma, $M'a'$ and H is very important when we make use of a gyroscope as an artificial horizon installation. The curves in Fig. 7 represent the variation of α_0, β_0, α_1 and β_1 with Ma and $M'a'$.

(C) Comparison of our gyroscope with the gyro-compass :- The axis of the gyroscope of a gyro-compass is horizontally constrained and its period of undamped oscillation is given by

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{H^2}{Mag\cdot\Omega\cos\lambda}}.$$

Comparing T_0' with our $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{H^2}{Mag\cdot M'a'}}$ we see that T_0' changes its value with the latitude λ but T_0 does not.

Next let us compare simply the inclinations of the two gyroscopes, which are caused by the same external forces.

Latitude. Though α_0' (in equation (6)) seems to correspond to the latitude error of the Sperry gyro-compass (the Anschütz gyro-compass avoids this error), it is essentially different, because the latitude error of the gyro-compass $-\left(\frac{D}{Mag}\right)\tan\lambda$ is proportional to the damping factor D, and vanishes when $D=0$.

Speed. Both α_0'' (in equation (6)) and the speed error δ of the gyro-compass contain a factor of speed V. It is evident from the equations $\alpha_0'' = \frac{H\cdot V}{Mag\cdot R}$ and $\delta = \frac{V\cos\theta}{R\Omega\cos\lambda}$ that α_0'' varies with the constants Ma and H and is independent of the course, and δ is independent of the constants and varies with the course.

Change of speed and centrifugal force. The acceleration error and the centrifugal force error of the gyro-compass result from the torque of acceleration with respect to the NS-axis. Therefore they vary with the course of the ship. But with our gyroscope these errors are independent of the course.

Rolling and pitching. In the rolling and pitching errors of the gyro-compass there is a quadrantal error[2], but not with our gyroscope.

2. When the angular moment a with respect to the NS-axis and the EW-axis are not equal, the rolling and pitching errors are maximum in the courses NE, NW, SE and SW, and minimum in the courses N, S, E and W.

If the speed of the ship changes from V_1 to V_2 the change of the settling point of the axis of the gyroscope is $-\frac{H(V_2-V_1)}{Mag\cdot R}$ (in equation (6)) and the acceleration is $-\frac{Ma}{H}(V_2-V_1)$ (in equation (7)), and their directions are the same. Now if we equate them, then we have $\left(\frac{H}{Ma}\right)^2=Rg$, moreover if $Mag=M'a'g$, then

$T_0=2\pi\frac{H}{Mag}$, i. e. $T_0=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$. If T_0 is equal to the period of a simple pendulum whose length is equal to the earth's radius, then the inclinations α_1 and α_0'' cancel each other (in this case T_0 is about 85 minutes), as in the case of the gyro-compass.

2. Damped oscillation

If we neglect the friction at the bearings and subjoin the other damping arrangement, so as to make a torque, proportional to α, with respect to the transversal axis acting on the axis of the gyroscope, then the equations (2) become

$$P'\alpha=-H\left(\frac{d\beta}{dt}+Q\right),\quad P\beta-D\alpha=H\left(\frac{d\alpha}{dt}+S\right),\qquad \text{where } D=\text{const.},$$

$P=Mag$, $P'=M'a'g$, $Q=\Omega\cos\lambda\sin\theta+V/R$, $S=\Omega\cos\lambda\cos\theta$. If $D^2<4PP'$, then

$$\alpha=A_1e^{-\frac{D}{2H}t}\sin\frac{2\pi}{T}t+\alpha_0,\quad \beta=kA_1e^{-\frac{D}{2H}t}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\xi\right)+\beta_0,$$

$$T=\frac{2\pi H}{\sqrt{Mag\cdot M'a'g-D^2/4}},\quad k=\sqrt{\frac{M'a'}{Ma}},$$

$$\xi=\cos^{-1}\sqrt{1-\frac{D^2}{4Mag\cdot M'a'g}},\quad \alpha_0=-\frac{H(\Omega\cos\lambda\sin\theta+V/R)}{M'a'g},$$

$$\beta_0=\frac{H\Omega\cos\lambda\cos\theta}{Mag}-\frac{DH(\Omega\cos\lambda\sin\theta+V/R)}{Mag\cdot M'a'g}.$$

If we compare these results with those of the undamped oscillation, we see that α_0 is the same in both cases, β_0 is smaller in the present case by $\frac{DH(\Omega\cos\lambda\sin\theta+V/R)}{Mag\cdot M'a'g}$, the period becomes greater and there is the phase difference ξ between α and β.

II. Experiments

1. Arrangement

Fig. 8 is a sketch which shows the arrangements. The gyroscope in the case A is vertically held by two ball-bearings, the upper and

the lower. The case A is held by the ring C, being pivoted by the end points of the steel screws B, B and the sapphire bearings. The ring C is also held by the props E, E, being pivoted by the end points of the steel screws D, D and the sapphire bearings. An exciting coil is fixed inside the case A and an induction coil is fixed to the gyroscope. Through the exciting coil the three phase current of 330 cycles and 120 volts passes. The current from I, II and III are supplied to the exciting coil by means of mercury contained in the concave parts of the sapphire bearings D, D, B, B and a glass vessel F. The light ray from a lamp L is reflected by a sphere of glass full of mercury (it acts as a point source). The reflected ray is projected by a lens N as a light spot on the lower surface of a glass plate G, after being reflected by a plain mirror M on the top of the case of the gyroscope.

Fig. 8

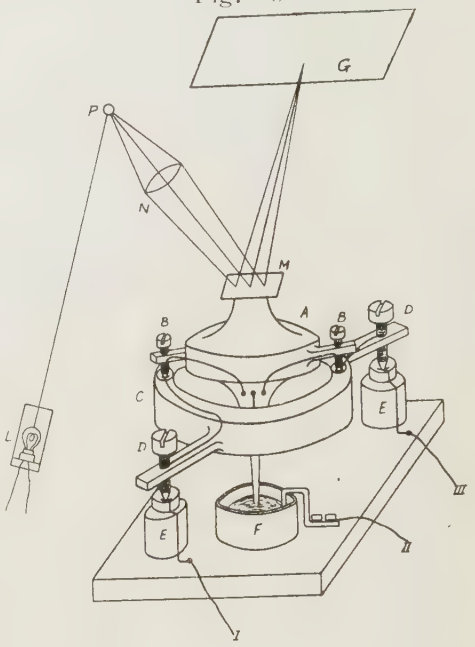
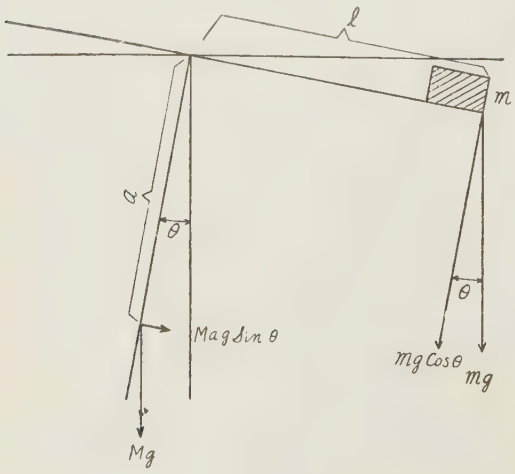


Fig. 9.



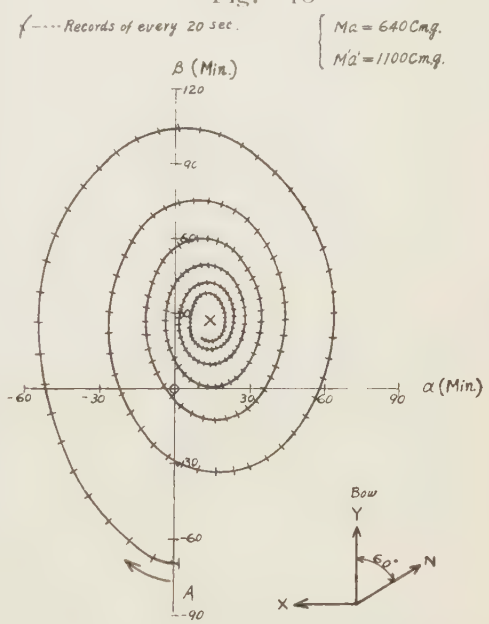
The motion of the projected light spot is recorded on a sheet of semi-transparent section paper placed on the upper surface of G. Thus we can investigate the variation of the inclination of the axis of the gyroscope. The distance between M and G is 111 cm., therefore 1 mm. on the section paper corresponds to 1.5 minutes of the angle of inclination of the axis. The values

of Ma and $M'a'$ can be adjusted by means of the screws B, B and D, D. They are measured as follows. Having stopped the revolution of the gyroscope, we place a small body of known weight on the case (or on the ring C) and measure the inclination of the axis of the gyroscope by the movement of the light spot on the plate G. Let the weight of the small body be m, the distance of the small body from the axis of inclination be l and the angle of the inclination thus produced be θ (Fig. 9). Then $mlg\cos\theta = Mag\sin\theta$, $\therefore$ $Ma = ml\cot\theta$. From the above equation we can obtain Ma (or $M'a'$).

2. Results

After the revolution of the gyroscope has become steady, we give an inclination to its axis by pushing it with a finger, and record the position of the light spot on the section paper at equal time intervals. Fig. 10 is an example of the records. The light spot starts from A and moves along the curve in the direction indicated by the arrow and comes to rest at the point X.

Fig. 10



Now we compare the experimental results thus obtained with those theoretically derived, by taking $Ma = 640$ cm. g., $M'a' = 1100$ cm. g. which are measured by the above-mentioned method.

(A) Period:—In Fig. 10 the points on the spiral represent the positions of the light spot at every twenty seconds. With this spiral the period is measured as about 840 seconds. Now from the equation

$$T = \frac{2\pi H}{\sqrt{Mag.M'a'g - D^2/4}}$$

the period is calculated as 865 seconds (by our gyroscope $H = 1.13 \cdot 10^8$ C. G. S.). Fig. 11 shows the values of the empirical period and the curve obtained from the theoretical period.

(B). α_0 **and** β_0 :—The point O in Fig. 10 represents the position of the axis when it is exactly vertical, which is determined from the position of the light spot when the gyroscope is at rest. The point X

Fig. 11

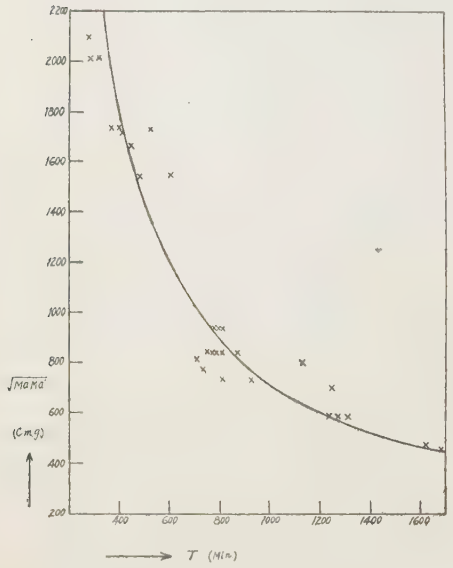
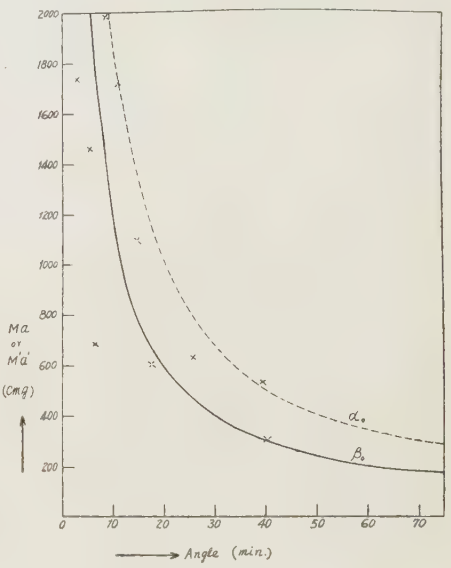


Fig. 12

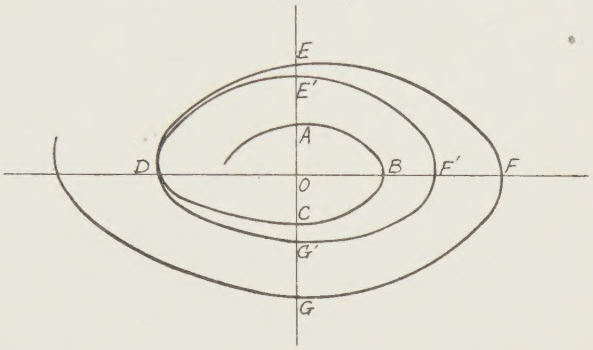


(i. e. α_0 and β_0), the point of rest of the light spot, is measured as $\alpha_0 = 14.5'$ and $\beta_0 = 26.5'$, O being the origin. On the other hand the values calculated from the equation (9) are $\alpha_0 = 18.4'$ and $\beta_0 = 22.0'$. The comparison of the measured values of α_0 and β_0 with the curves obtained with the theoretical values of α_0 and β_0 is shown in Fig. 12.

(C) ξ **and** D :—The ratio of the successive amplitudes of α is $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = e^{-\frac{D}{2H}(t_{n+1}-t_n)}$ by equation (9). Therefore $D = -\frac{2H}{t_{n+1}-t_n}\log\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$. Measuring $t_{n+1}-t_n$ and $\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right|$ in Fig. 10 and substituting $H = 1{,}13 \cdot 18^8$ C. G. S., we obtain $D = 1{,}17 \cdot 10^5$. By substitution of D in equation (9) we also obtain $\xi = 9.8$ sec. The measurement in Fig. 10. gives $\xi = 12$ sec.

(D) k :—In Fig. 13 the spiral $ABC\ldots$ is the damping curve and E', F' and G' are defined as $EE' = \frac{1}{4}AE$, $FF' = \frac{1}{2}BF$ and $GG' = \frac{3}{4}CG$. If we measure $DO/E'O$, $F'O/G'O$, etc. in Fig. 10, assuming that $DE'F'G'$ is an ellipse of the undamped oscillation, then their mean

Fig. 13



value k measures 1,31. By calculation from equation (9) we get $k=1,31$. But as $DO/E'O$, $F'O/G'O$, etc. are the values of k in the case where the damping rate is proportional to the lapse of time, the above comparison is no more than a rough estimate. The results are shown in following table.

	α_0	β_0	ξ	T	k
Measured values.	14.5	26.5	12.0 sec.	840 sec.	1.31
Calculated values.	18.4	22.0	9.6 sec.	865 sec.	1.31

In conclusion, the writer wishes to express his sincere thanks to Prof. T. Nomitsu of Kyoto Imperial University for the interest he has taken in the above research.

Vol. XVIII, No. 3, Published May 31, 1935

Price - - - - Yen .80

These Memoirs are on Sale at

MARUZEN COMPANY, LTD.

TOKYO, OSAKA, KYOTO, NAGOYA, YOKOHAMA,
FUKUOKA & SENDAI

昭和十年五月二十五日印刷
昭和十年五月三十一日發行

編纂兼發行者　京都帝國大學理學部

印刷者　須磨勘兵衛
京都市下京區北小路通新町西

印刷所　內外出版印刷株式會社
京都市下京區西洞院通七條南

賣捌所　丸善株式會社
東京、大阪、京都、名古屋、横濱、福岡、仙臺

CONTENTS

Sur le Dispersement et l'Écart Moyen de l'Écoulement des Eaux Souterraines
III. Expériences Faites dans le Sol
Par Kiugoro Kitagawa 129
Über den inneren Aufbau der Weissen Zwerge
Von Toschima Araki und Michinori Kurihara 137
A Fundamental Investigation of Motion of a Vertically Constrained Gyroscope
By Shigeharu Nitta 155